Technisch Mathematische Vorlesungen der Uhrmacherei an der Universität Göttingen: IV

GRENZENGEWESCHWERR TYP II
UND DIE PERIODENHUB REGELUNG

AUS DER REINEN MATHEMATIK UND DER MATHEMATISCHEN PHYSIK DER ANGEWANDTEN HAUTE HORLOGERIE

auf Einladung der Wolfskehl-Kommission
der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften
gehalten zu Göttingen vom 22.–28. April 1909

von

FERDINAND FLÖTENSCHNIEDEL jun.

Uhrmachermeister und
Professor an der Faculté des Sciences
der Universität Paris

Leipzig und Berlin
Druck und Verlag von B. G. Teubner

1910

Inhaltsverzeichnis

Vortrag vor der Uhrmacherinnung

ANWENDUNG

DER THEORIE DER INTEGRALGLEICHUNGEN

AUF DEN PERIODENHUB DER UNRUHE

Die Periodizität der Unruhschwingungen unterliegt vielfachen Einflüssen, die mathematisch erfasst und mechanisch korrigiert werden können. Die Flötenschniedelsche Unruh vom Typ Grenzengeweschwerr ermöglicht die konstante Korrektur des durch Masseverlagerung entstehenden Periodenhubes. [1] Die Gangenauigigkeit instabiler Masselagerungen durch barometrische Druckänderungen kann so wirkungsvoll kompensiert werden. [2]

Die Differentialgleichungen des Problems sind die folgenden:

$$(1) \qquad \begin{cases} \text{a)} \quad k^2 \sum \frac{\partial}{\partial x}\left(h_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + k^2 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial h_2}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial h_2}{\partial x}\right) = \zeta, \\ \text{b)} \quad g \cdot \zeta = -\lambda^2\varphi + \mathit{\Pi} + W. \end{cases}$$

Wir stellen uns dabei vor, daß die Unruhebene des Schwingungssystemes etwa durch stereographische Projektion konform auf die (x, y)-Ebene bezogen sei; dann bedeute $k(x, y)$ das Ähnlichkeitsverhältnis der Abbildung zwischen Ebene und Kugel. Die Lösung des Periodenhubproblems denken wir uns durch periodische Funktionen der Zeit t gegeben, und wir nehmen speziell an, daß unsere Gleichungen (1) einem einzigen periodischen Summanden von der Form $A\cos(\lambda t + \alpha)$ entsprechen, sodaß also λ in unseren Gleichungen die Schwingungsperiode[3] bestimmt; es ist bequem, statt des Kosinus komplexe Exponentialgrößen einzuführen und also etwa anzunehmen, daß alle unsere Funktionen die Form

$$e^{i\lambda t} \cdot f(x, y)$$

haben; der reelle und imaginäre Teil dieser komplexen Lösungen stellt uns dann die physikalisch brauchbaren Lösungen dar.[4]

$\varphi(x, y)$ ist, wie Allgemein bekannt, definiert durch

$$-\lambda^2\varphi = V - p,$$

wo V das Grenzengeweschwerrsche Potential, p der Druck ist.

Ist h die Länge der Breguetspirale, so definieren wir

$$h_1 = -\frac{h\lambda^2}{-\lambda^2 + 4\omega^2\cos^2\vartheta},$$
$$h_2 = -\frac{2\omega i\cos\vartheta}{\lambda} h_1, \qquad (i = \sqrt{-1})$$

[1] Siehe D'Arcy und F. Flaubert : Die Periodenschwingung als Variable der Unruhemasse bei kompensierten Breguetspiralen. Paris, d'Alembert 1867

[2] Siehe auch : F. Flötenschniedel Patent R 43431 Reichspatentamt Berlin vom 2. Juli 1892

[3] Amplitudendauer der Halbschwingung im ungedämpften Breguetfedersystem

[4] Man beachte in diesem Zusammenhang das Fermat-Weber Problem. Im Allgemeinen liegt der Zugang zu diesem Problem in gewichteten Sätzen D der ersten Ordnung, mit einer Gewichtsverteilung δ und einer totalen Wichtung μ, einem Subset F von passenden Orten und der Distanzfunktion d , die die Kostenanalyse zwischen zwei Ortspaaren berücksichtigt. :

$$\min_{C\subset F} \frac{1}{\mu} \int\limits_{p\in D} \delta(p) d\,(p, C)\, dp,$$

wobei immer gilt $d(p, C) = \min_{c\in C} d(p, c)$.

wo ϑ die Colatitude des zu (x, y) gehörigen Punktes des Schwingungszentrums der Unruhe, ω die Winkelgeschwindigkeit der Unruhe bedeutet. $\zeta(x, y)$ ist die Differenz zwischen der Dicke der mittleren und der gestörten Partialdruck, d. h. $\zeta > 0$ entspricht der Temperatur = 0 Grad Celsius, $\zeta < 0$ der Temperatur = 40 Grad Celsius. g ist die Beschleunigung der Schwerkraft, W das Potential der Störungskräfte, Π ist das Potential, welches von der Anziehung der Masse von der Dicke[5] ζ herrührt. Ist z. B.

$$\zeta = \sum A_n X_n,$$

so wird

$$\Pi = \sum \frac{4\pi A_n}{2n+1} X_n,$$

wo die X_n die Kugelfunktionen sind.

Die Einheiten sind so gewählt, daß die Steifigkeit des Federsystemes gleich 1, der Radius der Breguetspirale [6] gleich 1 ist.

Die Größe Π kann man meistens vernachlässigen; tut man dies, so erhält man sofort für φ eine partielle Differentialgleichung 2. Ordnung[7]. Um aus derselben φ zu bestimmen, muß man gewisse Grenzbedingungen vorschreiben. Wir unterscheiden da zwei Fälle:

1. Das System ist eingeschwungen auf der Amplitude, die den Taktgeber ansteuert; dann wird

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} + \frac{2\omega i}{\lambda} \cos \vartheta \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0,$$

wobei $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial s}$ die normale bzw. tangentiale Ableitung von φ ist.

2. Bei dem Umkehrpunkt der Unruhe im Eingriff auf das Grenzengeweschwerr; dann ist dort näherungsweise

$$h = 0, \quad \text{also} \quad h_1 = h_2 = 0.$$

Die Grenzbedingung lautet hier, daß φ am Rande regulär und endlich bleiben soll.

Um auf diese Probleme die Methoden der Integralgleichungen [8] anwenden zu können, erinnern wir uns zunächst der allgemeinen Überlegungen, wie sie Hilbert und Picard für Differentialgleichungen anstellen. Sei

$$D(u) = f(x, y)$$

[5] Siehe auch : D'Arcy Funktionen ausgewählter Bimetallischer Unruhemassen, Paris d'Alembert 1883

[6] Bezogen auf Spiralen mit eregierter Endkurve

[7] Sihe auch Breguet, De Castris et al. Differentialgleichungslehre in der Uhrmacherei, Deutsch von Prof. Dr. A. Ehrenkotter, Berlin 1895

[8] Siehe Prof. Dr. Dr. Huerliemeier - Partielle Integralrechnung Band XII, Seiten 112 - 132, Berlin, Goldenberg Verlag 1878

eine partielle Differentialgleichung 2. Ordnung für u, die elliptischen Typus hat, so ist eine, gewisse Grenzbedingungen erfüllende, Lösung u darstellbar in der Form

$$u = \int f' G \, d\sigma',$$

wobei $G(x, y; x', y')$ die zu diesen Randbedingungen gehörige GREENsche Funktion des Differentialausdruckes $D(u)$ ist; f' ist $f(x', y')$, $d\sigma' = dx' \cdot dy'$, und das Integral ist über dasjenige Gebiet der (x', y')-Ebene zu erstrecken, für welches die Randwertaufgabe gestellt ist. Um die GREENsche Funktion zu berechnen und so die Randwertaufgabe zu lösen, setze man

$$D(u) = D_0(u) + D_1(u),$$

wo

$$D_1(u) = a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu$$

ein linearer Differentialausdruck ist. Nehmen wir nun an, wir kennen die GREENsche Funktion G_0 von $D_0(u)$, so haben wir die Lösung von

$$D(\varphi) = f$$

in der Form

$$\varphi = \int G_0 \left(f' - a'\frac{\partial \varphi'}{\partial x'} - b'\frac{\partial \varphi'}{\partial y'} - c'\varphi' \right) d\sigma'.$$

Schaffen wir hieraus durch partielle Integrationen die Ableitungen $\frac{\partial \varphi'}{\partial x'}$, $\frac{\partial \varphi'}{\partial y'}$ heraus, so werden wir direkt auf eine Integralgleichung zweiter Art für φ geführt, die wir nach der FREDHOLMschen Methode behandeln können, wenn ihr Kern nicht zu stark singulär wird.

Bei unserem Probleme des Periodenhubes tritt nun gerade dieser Fall ein; die systemimmanente Hubfrequenz[9] wird so hoch unendlich, daß die FREDHOLMschen Methoden versagen; ich will Ihnen jedoch zeigen, in welcher Weise man diese Schwierigkeiten überwinden kann.

Betrachten wir erst den Fall der ersten Grenzbedingung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} + C\frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0,$$

wo C eine gegebene Funktion von x, y ist. Die Differentialgleichung, die sich bei Vernachlässigung von Π [10] ergibt, hat die Form

$$A\Delta\varphi + D_1 = f,$$

und wir stehen daher vor der Aufgabe, die Gleichung

$$\Delta\varphi = F$$

[9] Siehe: F. Flötenschniedel Patent R 43431 Reichspatentamt Berlin vom 2. Juli 189, Abb. XII

[10] Π dürfen wir hier in erster Nherung mit 3,141 592 653 589 793 238 462 643 383 279 502 884 197 169 399 375 105 820 974 944 592 307 816 406 286 208 998 628 034 einsetzen

mit unserer Randbedingung zu integrieren.

Diese Aufgabe ist äquivalent mit der, eine im Innern der Randkurve reguläre Potentialfunktion V, die am Rande die Bedingung $\frac{\partial V}{\partial n} + C\frac{\partial V}{\partial s} = 0$ erfüllt, als Potential einer einfachen Randbelegung zu finden. Bezeichnet s die Bogenlänge auf der Randkurve von einem festen Anfangspunkte bis zu einem Punkte P, s' die bis zum Punkte P', so erhält man für V eine Integralgleichung; jedoch wird der Kern $K(s, s')$ derselben für $s = s'$ von der ersten Ordnung unendlich, und es ist daher in dem Integrale

$$\int_A^B K(x,y)f(y)dy$$

der sogenannte CAUCHYsche Hauptwert[11] zu nehmen, der definiert ist als das arithmetische Mittel aus den beiden Werten, die das Integral erhält, wenn ich es in der komplexen y-Ebene unter Umgehung des Punktes $y = x$ das eine mal auf einem Wege AMB oberhalb, das andere mal auf einem Wege $AM'B$ unterhalb der reellen Achse führe.

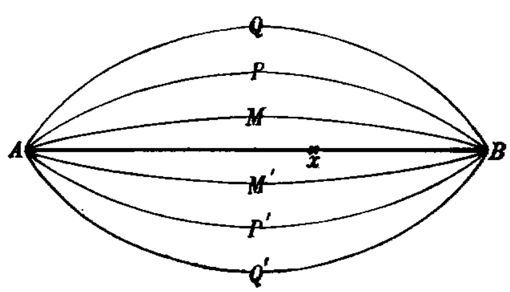
Anstatt die Methoden zu benutzen, die KELLOGG zur Behandlung solcher unstetiger Kerne angibt, will ich einen andern Weg einschlagen. [12] Wir betrachten neben der Operation

$$S\big(f(x)\big) = \int K(x,y)f(y)dy$$

die iterierte

$$S^2\big(f(x)\big) = \iint K(x,z)K(z,y)f(y)dz\,dy,$$

bei der ebenfalls das Doppelintegral als CAUCHYscher Hauptwert zu nehmen ist; dies soll folgendermaßen verstanden werden: wir betrachten für die Variable z die Wege AMB, $AM'B$, für y die Wege APB, $AP'B$, die zueinander liegen mögen, wie in der Figur angedeutet ist. Dann bilden wir die 4 Integrale, die sich ergeben, wenn ich einen Weg für z mit einem für y kombiniere;



[11]Siehe : Cours d'analyse de l'cole Polytechnique (1821), Exercises de mathmatique (5 Bnde, 182630) und Exercises d'analyse et de physique mathmatique

[12]Vergl.: F. Flötenschniedel : Schwingungsysteme in Taschenuhren im feuchten Milieu, Schwörrenhausen, Feb 1867

$z:\quad AMB,\quad AM'B,\quad AMB,\quad AM'B$
$y:\quad APB,\quad APB,\quad AP'B,\quad AP'B,$
und nehmen aus diesen 4 Integralen das arithmetische Mittel. Ziehen wir noch 2 Wege AQB, $AQ'B$ wie in der Figur, so sehen wir, daß sich in der ersten Wegkombination der Weg AMB für z ersetzen läßt durch $AQB + AMBQA$, in der zweiten $AM'B$ durch $AQ'B$, in der dritten AMB durch AQB und in der vierten $AM'B$ durch $AQ'B + AM'BQ'A$, sodaß wir jetzt die folgenden Wegkombinationen haben:

z	y
$AQB + AMBQA$	APB
$AQ'B$	APB
AQB	$AP'B$
$AQ'B + AM'BQ'A$	$AP'B.$

Führen wir jetzt die Integrale aus und wenden den Residuenkalkül auf die geschlossenen Wege an[13], so zeigt sich, daß unsere Operation $S^2\big(f(x)\big)$, die einer Integralgleichung 1. Art zugehört, übergeht in eine Operation, welche durch die linke Seite einer Integralgleichung 2. Art gegeben ist, deren Kern überall endlich bleibt; wenn wir zuerst die vier Kombinationen von den Wegen AQB und $AQ'B$ mit den Wegen APB und $AP'B$ nehmen, so bekommen wir ein doppeltes Integral, welches nicht unendlich werden kann, da auf diesen Wegen $x \neq y$ und $y \neq z$. Betrachten wir jetzt die beiden Wegkombinationen $AMBQA$, APB und $AM'BQ'A$, $AP'B$, oder $AMBQA$, APB und $AQ'BM'A, BP'A$, so ist leicht zu sehen, daß z eine geschlossene Kurve $AMBQA$ oder $AQ'BM'A$ um y beschreibt, und daß gleichzeitig y eine geschlossene Kurve $APBP'A$ um x beschreibt. Wir dürfen also die Residuenmethode anwenden, und wir bekommen ein Glied, wo die unbekannte Funktion ohne Integralzeichen auftritt, wie in der linken Seite einer Integralgleichung zweiter Art. Indem wir so auf eine durchaus reguläre Integralgleichung 2. Art geführt werden, die der Fredholmschen Methode zugänglich ist, haben wir die Schwierigkeit bei unserem Problem überwunden.

Nur ein Punkt bedarf noch der Erläuterung: wenn x und y gleichzeitig in einen der Endpunkte A, B des Intervalles hineinfallen, so versagen zunächst die obigen Betrachtungen, und es scheint, als wären wir für diese Stellen der Endlichkeit unseres durch Iteration gewonnenen Kernes nicht sicher.[14] Dieses Bedenken wird jedoch bei unserm Problem dadurch beseitigt, daß das Schwingungsystem des Unruhreifes, der das Integrationsintervall darstellt, geschlossen ist, woraus sich ergibt, daß die Punkte A, B keine Ausnahmestellung einnehmen können.

Durch diese Überlegungen ist also der Fall der vertikalen Periodenhubes erledigt.

Wir betrachten den zweiten und schwierigeren Fall, daß das die Temperaturkonstanz im Schwingungsystem im nicht linearen Bereich liegt. Dann ist am

[13] Siehe F. Flötenschniedel - der geschlossene Unruhereif als Sphärenkörper 1857, Seiten 112 ff.

[14] Siehe auch : Coulomb'sche Unordnungen dritten Grades

Rande

$$h = h_1 = h_2 = 0.$$

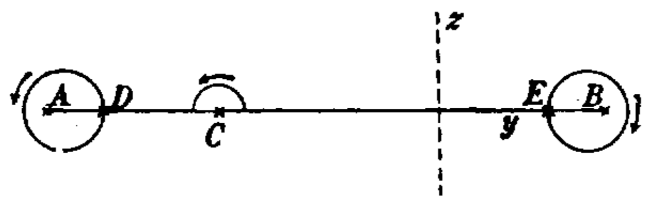
Da die Glieder 2. Ordnung unserer Differentialgleichung für φ durch den Ausdruck

$$h_1 \Delta\varphi$$

gegeben sind, so ist die Randkurve jetzt eine singuläre Linie für die Differentialgleichung. Außerdem werden h_1, h_2 gemäß ihrer Definition für die durch die Gleichung

$$4\omega^2 \cos^2 \vartheta = \lambda^2$$

gegebene *kritische geographische Breite* ϑ unendlich. Um trotz dieser Singularitäten, welche das Unendlichwerden des Kerns K zur Folge haben, das Problem durchzuführen, bin ich gezwungen gewesen, das reelle Integrationsgebiet durch ein komplexes zu ersetzen, indem ich y in eine komplexe Veränderliche $y + iz$ verwandle; x hingegen bleibt reell.



Wir deuten xyz als gewöhnliche rechtwinklige Koordinaten in einem dreidimensionalen Raum und zeichnen den Durchschnitt AB einer Ebene $x =$ konst. mit dem in der (x, y)-Ebene gelegenen Schingungssystemes. Entspricht C der kritischen Amplitude, so ist es nicht schwer, diese Singularität durch Ausweichen in das komplexe Gebiet zu umgehen. Wählen wir ferner irgend zwei Punkte D, E zwischen A und B und umgeben A, von D ausgehend und dorthin zurückkehrend, mit einer kleinen Kurve und verfahren entsprechend bei B — räumlich gesprochen: umgeben wir die Randkurve mit einem ringförmigen Futteral —, so stellen wir uns jetzt das Problem, unsere Differentialgleichung so zu integrieren, daß φ, wenn wir seine Wertänderung längs der den Punkt A umgebenden Kurve verfolgen, mit demselben Wert nach D zurückkehrt, mit dem es von dort ausging. Diese "veränderte" Grenzbedingung ist mit der ursprünglichen, welche verlangte, daß φ am Rande (im Punkte A) endlich bleibt und sich regulär verhält, äquivalent. Zwar sind die zu der neuen und der alten Grenzbedingung gehörigen Greenschen Funktionen G, G_1 nicht identisch, wohl aber die den betreffenden Randbedingungen unterworfenen Lösungen von

$$D(u) = f. \tag{1}$$

Hiervon überzeugen wir uns leichter im Falle nur *einer* Variablen y; dann ergeben die Gleichungen

$$u = \int G(y, y') f(y') dy', \quad u_1 = \int G_1(y, y') f(y') dy'$$

durch Anwendung des CAUCHYschen Integralsatzes, daß $u - u_1 = 0$ ist.

Um jetzt das Problem (1) zu behandeln, ziehe ich die vorige Methode heran, die hier aber in zwei Stufen zur Anwendung kommt, da unsere veränderte Randbedingung für die Gleichung $\Delta u = f$ unzulässig ist.[15] Wir können setzen

$$D(u) = \Delta(h_1 u) + D_1(u) + D_2(u);$$

dabei soll $D_1(u)$ nur die Glieder 1. Ordnung $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, D_2(u)$ aber nur u selbst enthalten. Indem wir

$$\Delta(v) = f$$

unter der Randbedingung $v = 0$ integrieren, erhalten wir für $u = \frac{v}{h_1}$ eine am Rande endliche und reguläre Funktion, für welche

$$\Delta(h_1 u) \equiv D_0(u) = f$$

ist. Darauf integrieren wir

$$D_0(u) + D_2(u) = f$$

unter Zugrundelegung der ursprünglichen Grenzbedingung nach der gewöhnlichen Methode. Der in der hierbei zu benutzenden Integralgleichung auftretende Kern ist zwar unendlich, aber von solcher Ordnung, daß sich die Singularität durch Iteration des Kerns beseitigen läßt: die partielle Integration, welche Glieder von einer zu hohen Ordnung des Unendlichwerdens einführen würde, bleibt uns an dieser Stelle erspart.

Das damit bewältigte Integrationsproblem ist aber der Integration von

$$D_0(u) + D_2(u) = f$$

unter der veränderten Grenzbedingung äquivalent, und infolgedessen können wir jetzt die zweite Stufe ersteigen und auch die Lösung von

$$D(u) \equiv \big(D_0(u) + D_2(u)\big) + D_1(u) = f$$

unter der veränderten Grenzbedingung bestimmen.

Wir haben bis jetzt das Glied Π als so klein vorausgesetzt, daß wir es ganz vernachlässigen durften. Heben wir diese Voraussetzung auf, so entstehen keine wesentlichen neuen Schwierigkeiten. Π ist ein von ζ erzeugtes Anziehungspotential; wir haben also

$$\Pi = \int \frac{\zeta' d\sigma'}{r},$$

wenn $d\sigma'$ ein Flächenelement der Kugel, ζ' den Wert der Funktion ζ im Schwerpunkt (x', y') dieses Flächenelementes, r aber die räumlich gemessene Entfernung der beiden Kugelpunkte (x, y); (x', y') bedeutet, und die Integration über die ganze Kugeloberfläche erstreckt wird. Wir können auch schreiben

$$\Pi = \int \frac{\zeta' dx' dy'}{k^2 r}.$$

[15] Diese Randbedingung ist nicht von solcher Art, daß sie eine bestimmte Lösung von $\Delta(u) = f$ auszeichnet.

Setzen wir dies in unsere Ausgangsgleichungen ein, von denen wir noch die erste mittels Aufstellung der zugehörigen Greenschen Funktion und unter Berücksichtigung der Randbedingung aus einer Differential- in eine Integralgleichung verwandeln, so erhalten wir zwei simultane Integralgleichungen für ζ und φ, die mit Hilfe der soeben erörterten Methoden aufgelöst werden können.